



GRAPHICAL MINIMIZATION OF NORMAL EXPRESSIONS
OF LOGIC FUNCTIONS USING TABLES OF THE VEITCH-
KARNAUGH TYPE

PUBLISHED IN POLISH UNDER THE TITLE:
GRAFICZNA MINIMALIZACJA W KLASIE
ALTERNATYWNYCH NORMALNYCH WYRAZEN
FUNKCJI LOGICZNYCH NA PODSTAWIE TABLIC TYPU
VEITCHA-KARNAUGHA

by

R. S. Michalski

Р. Михальски

Графическая минимизация в классе альтернативных нормальных выражений логических функции на основе матриц типа матриц Вейтча-Карно

Резюме

Дается метод получения совокупности простых импликантов на основе графического представления функции в матрице типа матриц Вейтча-Карно, а также метод их выбора на основе теоремы о локальном выборе экстремали или же путем построения таблицы аналогичной к исходной таблице (графическое умножение).

R. Michalski

GRAPHICAL MINIMIZATION IN THE CLASS OF-SUM-OF-PRODUCTS EXPRESSIONS OF SWITCHING FUNCTIONS USING MATRICES OF THE VEITCH-KARNAUGH TYPE

Summary

The paper presents a method of determining a set of prime implicants using a graphical representation of a function in matrices of the Veitch-Karnaugh type. The choice of implicants is based upon the theorem on the local selection of an extremal or is realized by the construction of a matrix analogous to the fundamental one (graphical multiplication).

Na prawach rękopisu

Ryszard Michalski

GRAFICZNA MINIMALIZACJA W KLASIE ALTERNATYWNYCH
NORMALNYCH WYRAZEŃ FUNKCJI LOGICZNYCH NA PODSTAWIE
TABLIC TYPU TABLIC VEITCHA-KARNAUGHA

Podano sposób uzyskiwania zbioru prostych implikantów na podstawie obrazu funkcji w tablicy typu tablic Veitcha-Karnaugh oraz ich wyboru na podstawie twierdzenia o lokalnym wyłuskiwaniu ekstremali lub przez budowę tablicy analogicznej do tablicy wyjściowej (mnożenie graficzne).

1. UWAGI WSTĘPNE

Większość prac, które ukazały się w ciągu ostatnich lat na temat minimalizacji funkcji logicznych, dotyczy przede wszystkim poszukiwania efektywnych algorytmów minimalizacji za pomocą maszyny cyfrowej. Ze względu bowiem na niezwykle szybki wzrost trudności wraz z ilością zmiennych jedynym sensownym sposobem minimalizacji przy funkcjach większej ilości zmiennych (ponad 7 lub 8) jest minimalizacja maszynowa. Warto tu także zaznaczyć, że wraz ze wzrostem ilości zmiennych nawet współczesne maszyny cyfrowe przestają być wystarczającym narzędziem do minimalizacji. W świetle takich prac jak np. prace Mc Gluskeya /1/, Waligórskiego /9/, Majstrowej /14/, Urbano i Muellera /16/, Rotha /17, 18/ i Żurawlewa /20/ wydaje się, że problem minimalizacji w klasie wyrażeń alternatywnych normalnych doczekał się paru efektywnych metod, zwłaszcza gdy chodzi o sformułowanie odpowiednich algorytmów dla maszyny cyfrowej.

W praktyce jednak często występują funkcje nie przekraczające 7 lub 8 zmiennych i istnienie jakiejś dogodnej metody "ręcznej" minimalizacji do tej ilości zmiennych wydaje się bardzo pożądane. Bardzo rozpowszechniona graficzna metoda Karnaugh /2/ jest metodą

wygodną, ale w zasadzie dla funkcji nie więcej niż 4 zmiennych. Ze względu na małą ilość zmiennych można w niej było uniknąć problemu wyboru prostych implikantów, który staje się problemem zasadniczym przy większej ilości zmiennych. Z tego względu wiele metod graficznych mających charakter metod "ręcznych" /4-8/, w których sposób wyboru prostych implikantów jest w zasadzie tylko intuicyjny, przy funkcjach ponad 4 zmiennych należy traktować raczej jako metody upraszczania i analizy funkcji niż metody minimalizacji. Znane zaś metody, ściśle rozwiązujące ten problem i używane do ręcznej minimalizacji, na przykład metoda Quine'a-Mc Cluskeya /1/, metoda minimalizujących kart - tzw. metoda harwardzka /12/ lub inne /16, 22/, wymagają już przy 4 lub 5 zmiennych bardzo dużo pracy formalnej, przez co nie są zbyt dogodne w praktyce.

Omówiona poniżej metoda powstała w wyniku próby stworzenia metody, w której jedno z wyrażeń minimalnych lub zbiorów wyrażeń granicznych zawierający wyrażenie minimalne uzyskuje się wyłącznie drogą graficzną przy minimalnej ilości pracy formalnej.

Przez wyrażenie graniczne (ros. tупиковоје) rozumie się wyrażenie alternatywne normalne, w którym skreślenie jakiegokolwiek litery ¹⁾ lub jakiegokolwiek składnika powoduje, że wyrażenie przestaje być ekwiwalentne funkcji wyjściowej.

W pracy niniejszej podano sposób uzyskiwania zbioru prostych implikantów na podstawie obrazu funkcji w tablicy typu tablic Veitcha-Karnaugh /2, 4/ oraz ich wyboru na podstawie sformułowanego w pracy twierdzenia o lokalnym wykuskiwaniu ekstremali lub przez budowę tablicy analogicznej do tablicy wyjściowej (mnożenie graficzne).

2. PRZYJĘTE OZNACZENIA

\bar{x}_1 - negacja x_1 , $x_1 \vee x_2$ - alternatywa, $x_1 \cdot x_2$ - koniunkcja, $P \cap L$ - iloczyn zbiorów, $P \cup L$ - suma zbiorów, $P-L$ - różnica zbiorów $P : = P \cup P$ - instrukcja podstawienia (zapożyczona z języka algorytmicznego Algol), która oznacza, że dowolna wielkość (na przykład zbiór, zmienna itp.) po lewej stronie znaku " : = " przyjmuje

¹⁾ Literą nazywa się zmienną w postaci prostej lub zanegowanej analogicznie do terminu angielskiego "literal" używanego przez Mc Cluskeya.

aktualną wartość wynikającą z operacji zapisanej po prawej stronie tego znaku,

$$x_1^{\sigma_1} = \begin{cases} x_1, & \text{jeśli } \sigma_1 = 1 \\ \bar{x}_1, & \text{jeśli } \sigma_1 = 0 \end{cases}$$

$$\bigwedge_{i=1}^k x_i^{\sigma_i} = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots x_k^{\sigma_k}$$

$$\bigvee_{i \in \{1,2,6\}} x_i^{\sigma_i} = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_6^{\sigma_6}$$

$$\bigvee_{i \in D_j} (x_i = 1) \text{ - kwantyfikator szczegółowy}$$

$$\bigwedge_{i \in D_j} (x_i = 1) \text{ - kwantyfikator ogólny}$$

3. KRÓTKA CHARAKTERYSTYKA PROCESU MINIMALIZACJI. OKREŚLENIA

Proces minimalizacji w klasie wyrażeń alternatywnych normalnych to jest wyrażenie o postaci ogólnej

$$F = \bigvee_{j=1}^r \bigwedge_{i \in D_j} x_i^{\sigma_{ji}} \quad (1)$$

(D_j - podzbiór j -ty zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ (ilość elementów podzbioru D_j nazywa się długością koniunkcji), n - ilość zmiennych, r - ilość składników w wyrażeniu - inaczej długość wyrażenia, $\sigma_{ji} \in \{0, 1\}$) można rozumieć jako proces poszukiwania wyrażenia w postaci (1) spełniającego jedno z trzech najczęściej stosowanych kryteriów:

1. Kryterium minimalnej ilości liter. Wyrażenie spełniające to kryterium nazywa się zwykle wyrażeniem minimalnym i określa się je jako wyrażenie alternatywne normalne, którego cena

$$C = \sum_{i=1}^r l_i \quad (2)$$

(l_1 - długość i-tej koniunkcji) jest minimalna

$$C = C_{\min} \quad (3)$$

2. Kryterium minimalnej ilości liter przy minimalnej długości wyrażenia. Wymaga ono, żeby przy

$$r = r_{\min}$$

było

$$C = C_{\min}$$

Wyrażenie spełniające warunek $r = r_{\min}$ nazywa się wyrażeniem najkrótszym. Wyrażenie odpowiadające powyższemu kryterium można zatem nazywać wyrażeniem minimalnym najkrótszym.

3. Kryterium minimalnej sumy

$$S = C + r = S_{\min} \quad (4)$$

Jest to tak zwane kryterium Quine'a.

Jak udowodnił Żurawlew /19/ przykładem funkcji 11 zmiennych, wyrażenie minimalne nie musi znajdować się wśród wyrażeń najkrótszych, toteż kryteria 1 i 2 w ogólnym przypadku mogą wymagać odrębnych metod. Można jednak wykazać (rezultat pracy nie opublikowany), że w przypadku funkcji nie więcej niż 8 zmiennych kryteria 1 i 2 są równoważne, toteż poszukiwanie wyrażenia minimalnego polega w takich przypadkach tylko na rozpatrzeniu wyrażeń najkrótszych.

W procesie minimalizacji można wyróżnić dwa etapy:

1) określenie zbioru prostych implikantów przez wielokrotne stosowanie równości

$$Bx_i \vee B\bar{x}_i = B \quad (5)$$

gdzie B - dowolna koniunkcja liter,

2) wybór podzbioru prostych implikantów /12/, który odpowiada wyrażeniu minimalnemu.

W przypadku większej ilości zmiennych zasadnicze trudności następuje etap drugi, ponieważ liczba prostych implikantów może osiągać duże wartości (np. ponad 16000 przy 11 zmiennych). Maksymalna ilość prostych implikantów r_{\max} funkcji n zmiennych została

oszacowana /21/ według zależności

$$(3^n/n) \leq r_{\max} \leq (3^n/\sqrt{n}) \quad (6)$$

Przy $n = 8$ jest $921 \leq r_{\max} \leq 2633$.

Okazuje się jednak, że przez pewien opisany w pracy sposób tworzenia zbioru prostych implikantów i stosowanie określonych twierdzeń w przeważającej ilości funkcji do około 8 zmiennych wybór prostych implikantów nie przysparza większych kłopotów, co najwyżej sprowadza się czasem do przeglądu niedużej ilości wariantów. Przegląd ten można wówczas dodatkowo uprościć stosując metodę tak zwanego mnożenia graficznego.

4. GRAFICZNY SPOSÓB PRZEDSTAWIENIA FUNKCJI LOGICZNEJ

W tablicach Veitcha /4/ i Karnaugh'a /2/ wierzchołkom jednostkowej kostki n -wymiarowej, służącej jako model funkcji logicznej, przyporządkowuje się pewne pola, natomiast wartościom zmiennych - odpowiednie zespoły pól (rys. 1). Ten sposób rozwinięcia kostki n -wymiarowej na płaszczyźnie okazał się bardzo dogodny do ręcznego określenia własności funkcji zadanej na zbiorze wierzchołków.

Rys. 1. Tablica Karnaugh'a dla funkcji 4 zmiennych

| | | | | | |
|-------|-------|-------|----|-------|----|
| | | x_4 | | | |
| | | | | x_3 | |
| | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| x_2 | x_1 | 00 | 01 | 11 | 10 |
| | | 0 | 1 | 3 | 2 |
| | | 4 | 5 | 7 | 6 |
| | | 12 | 13 | 15 | 14 |
| | 10 | 8 | 9 | 11 | 10 |

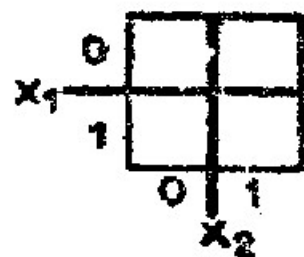
Liczby dziesiętne wpisane w poszczególne pola tablicy na rys. 1 są odpowiednikami dziesiętymi liczb dwójkowych, które tworzą zestawienia wartości zmiennych ustawionych w kolejności x_1, x_2, x_3, x_4 .

Znane dogodne własności tablic Karnaugh'a - koniunkcje są -siednie (o odległości jednostkowej) odpowiadają polom sąsiednim - dotyczą funkcji nie więcej niż 4 zmiennych. Przy większej ilości zmiennych należy budować modele przestrzenne, a jeśli pozostaje się w jednej płaszczyźnie /3/, to algorytm upraszczania komplikuje się. Aby uniknąć tych trudności, można zastosować inny sposób bu-

dowy tablic na przykład według Zakriewskiego /5/.

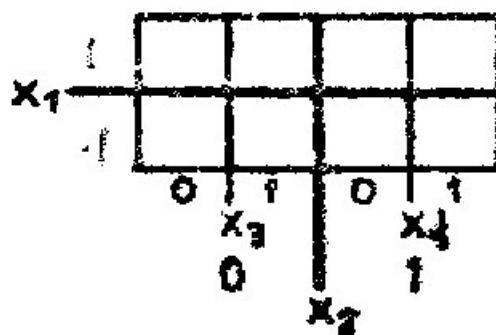
W pracy niniejszej zastosowano sposób następujący:

Przy dwóch zmiennych x_1 i x_2 tablicę dzieli się na dwie warstwy i dwie kolumny. Dolną warstwę i prawą kolumnę przyporządkowuje się wartości 1, górną warstwę i lewą kolumnę - wartości 0 odpowiednio zmiennej x_1 i x_2 (rys. 2).

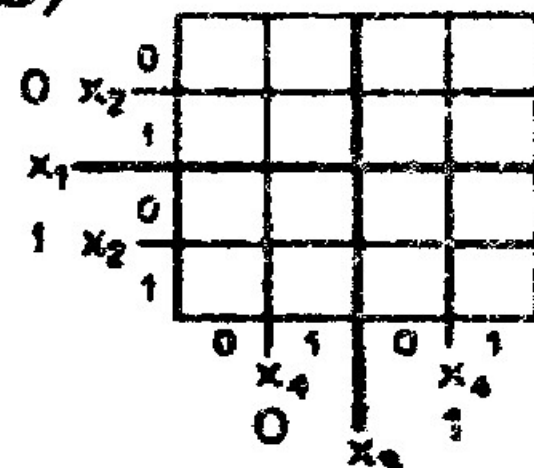


Rys. 2. Tablica dla funkcji 2 zmiennych

a)



b)



Rys. 3. Tablica dla funkcji 2 zmiennych (a) i 3, zmiennych (b)

Przy 3 zmiennych każdą kolumnę tablicy dla 2 zmiennych dzieli się na dwie węższe kolumny, z których prawą przyporządkowuje się wartości 1, lewą zaś wartości 0 zmiennej x_3 (rys. 3a). Przy dodaniu czwartej zmiennej x_4 dzieli się z kolei każdą warstwę na dwie węższe, przy czym oznaczenia tablicy zmienia się tak jak pokazano na rys. 3b.

Po dodaniu każdej następnej zmiennej dzieli się kolejno na pół raz kolumny, raz warstwy, przy czym:

a) prawą kolumnę i dolną warstwę przyporządkowuje się zawsze wartości 1, natomiast lewą kolumnę i górną warstwę wartości 0 odpowiedniej zmiennej,

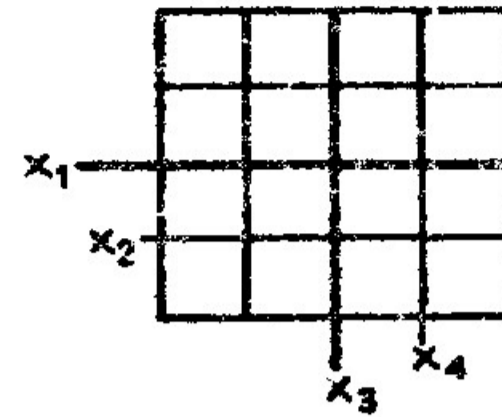
b) oznaczenia tablicy zawsze zmienia się tak, żeby jednej części zmiennych od x_1 do $x_{n/2}$ (gdy n - parzysta) lub do $x_{(n-1)/2}$ (gdy n - nieparzysta) były przyporządkowane pary kolejno zwężających się warstw, pozostałym zmiennym zaś analogiczne pary kolumn.

Ze względu na niezmienny sposób przyporządkowania (pkt a) tablicę można oznaczać w sposób uproszczony jak na rys. 4: daną zmienną pisze się tylko raz obok jednej z osi oddzielających dwie warstwy lub dwie kolumny przyporządkowane dwóm wartościom danej zmiennej.

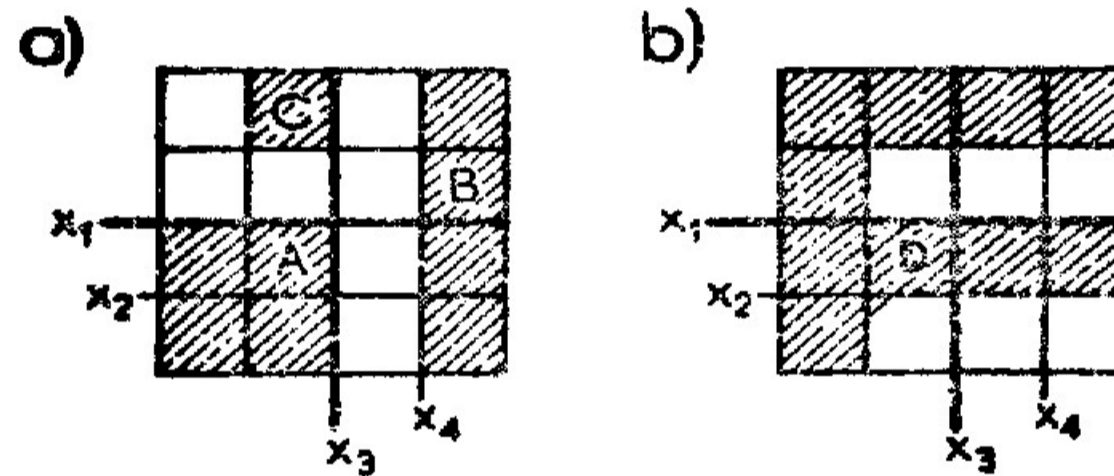
Wartości 1 lub 0 każdej zmiennej odpowiada więc w tablicy powierzchnia złożona z jednej warstwy lub kolumny albo z zespołu warstw

lub kolumn, którego powierzchnia całkowita jest zawsze równa połowie powierzchni tablicy.

Rys. 4. Uprozczone oznaczenie tablicy dla funkcji 4 zmiennych



Ponieważ przy tworzeniu wyrażeń algebraicznych funkcji wartości 0 zmiennej x_1 odpowiada litera \bar{x}_1 , wartości 1 - litera x_1 , więc odpowiednie pary warstw i kolumn w tablicy można także traktować jako przyporządkowane poszczególnym literom danej zmiennej. Działaniom logicznym na literach odpowiadają wtedy odpowiednie działania na wycinkach powierzchni tablicy.



Rys. 5. Działania logiczne w tablicy

- a) koniunkcja: $\alpha(A) = x_1 \bar{x}_3$, $\alpha(B) = x_3 x_4$, $\alpha(C) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$
 b) alternatywa: $\alpha(D) = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2$

Koniunkcji liter odpowiada przecięcie powierzchni przyporządkowanych danym literom, alternatywie - połączenie powierzchni przyporządkowanych poszczególnym składnikom sumy (rys. 5).

Przecięcia najwęższych warstw z najwęższymi kolumnami tworzą pola tablicy, które odpowiadają pełnej koniunkcji liter, tj. zawierającej wszystkie zmienne. Pól tych jest 2^n (przy czym n - ilość zmiennych). Łatwo sprawdzić, że odpowiedniki dziesiętne koniunkcji

odpowiadających poszczególnym polom tablicy układają się w niej w pewien sposób systematyczny (rys. 6 i 7).

| | | | | |
|-------|----|-------|-------|----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| x_1 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| x_2 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | | x_3 | x_4 | |

Rys. 6. Rozkład odpowiedników dziesiętnych w tablicy dla funkcji 4 zmiennych

| | | | | | | | | |
|----------|---|---|-------|---|---|-------|-------|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | |
| x_1 24 | | | | | | | | |
| 32 | | | | | | | | |
| 40 | | | | | | | | |
| x_2 48 | | | | | | | | |
| x_3 56 | | | | | | | | |
| | | | x_4 | | | x_5 | x_6 | |

Rys. 7. Rozkład odpowiedników dziesiętnych w tablicy dla funkcji 6 zmiennych

Graficzne przedstawienie funkcji w tablicy polega na przyporządkowaniu poszczególnym polom tablicy odpowiednich wartości funkcji, np. przez wpisanie 1 w pola odpowiadające zestawieniom wartości zmiennych (lub koniunkcjom), przy których funkcja przyjmuje wartość 1. Jeśli istnieją zestawy, przy których funkcja nie jest określona (zestawienia obojętne), to odpowiednie pola można zaznaczyć np. gwiazdką. Ze względu na to, że poszczególne pola tablicy wyczerpują wszystkie możliwe zestawienia wartości zmiennych, pola puste będą odpowiadały zerowym wartościom funkcji.

| | | | | |
|-------|---|-------|-------|--|
| | * | | | |
| x_1 | * | | | |
| x_2 | * | | | |
| | * | | | |
| | | x_3 | x_4 | |

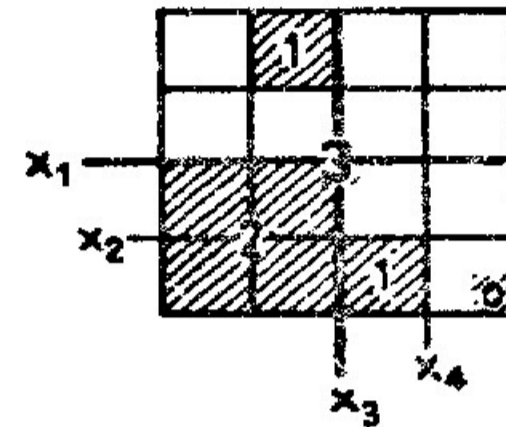
Rys. 8. Przykład obrazu funkcji 4 zmiennych

Tablicę z naniesionymi wartościami funkcji nazywa się obrazem funkcji (rys. 8). Zbiór pól oznaczonych 1 nazywa się obrazem jedynek. Zbiór pól odpowiadających zestawieniom obojętnym nazywa się obrazem zestawień obojętnych i - analogicznie - zbiór pól odpowiadających zerowym wartościami funkcji nazywa się obrazem zer.

5. OPERACJE UPRASZCZAJĄCE NA OBRAZIE FUNKCJI

Operacje upraszczające na obrazie funkcji polegają na odnajdowaniu par pól obrazu jedynek, a następnie par kolejno dwukrotnie większych zbiorów pól takich, żeby za każdym razem elementom pary odpowiadały koniunkcje sąsiednie. Każdą taką parę wyraża - zgodnie ze wzorem (5) - pojedyncza koniunkcja liter.

Rys. 9. Kwadraty rzędu 0, 1, 2 i 3



Pojedyncze pole tablicy nazywa się kwadratem zerowego rzędu. Każdy kwadrat zawierający cztery kwadraty zerowego rzędu i usytuowany tak, żeby pozostałe kwadraty tej wielkości mogły całkowicie pokryć tablicę, nazywa się kwadratem pierwszego rzędu. Analogicznie określa się kwadraty wyższych rzędów (rys. 9). Dwa pola znajdujące się w różnych kwadratach rzędu n mają w nich podobne położenie, jeśli po nałożeniu na siebie tych kwadratów bez wykonywania skrętu pola te pokryją się. Dowolne dwa pola tablicy będące z definicji kwadratami zerowego rzędu spełniają więc zawsze warunek podobnego położenia w kwadratach zerowego rzędu.

Zbiór 2^k pól wyrażający się jedną koniunkcją liter nazywa się zespołem rzędu k .

Poniżej podano zasady określania zespołów pól.

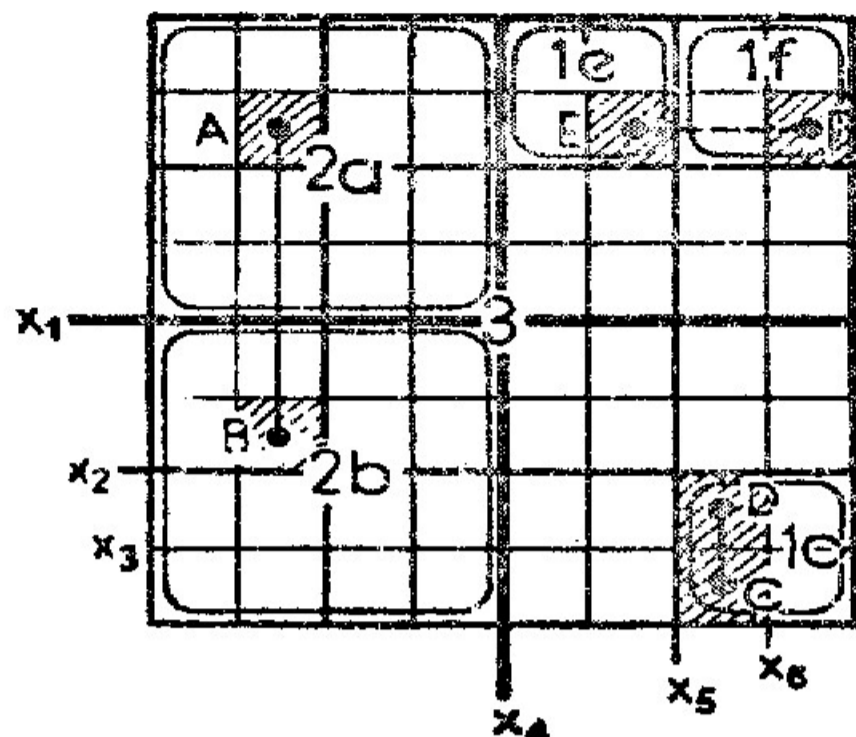
1. Dwa pola obrazu tworzą zespół rzędu 1, jeśli można dla nich dobrać takie dwa kwadraty rzędu n , leżące wzdłuż jednej linii pionowej lub poziomej oraz w tym samym kwadracie rzędu $(n + 1)$, że pola te mają w nich podobne położenie.

2. Dwa zespoły rzędu k ($k = 1, 2, 3, \dots$) tworzą zespół rzędu $(k + 1)$, jeśli każdemu polu jednego zespołu można przypisać pole drugiego zespołu, w którym tworzy ono zespół rzędu 1.

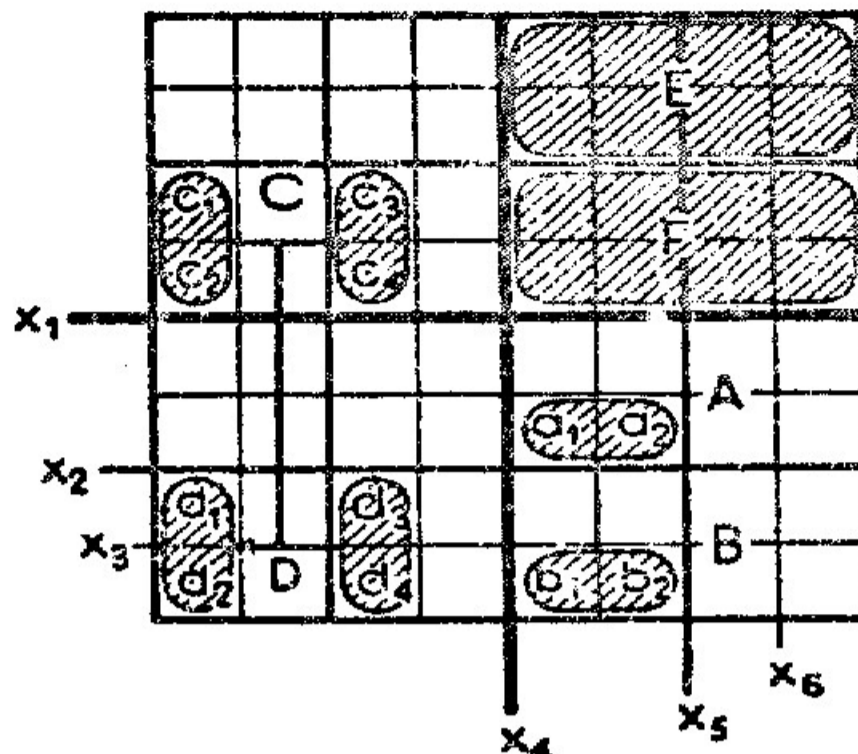
Isnieje zależność

$$m = n - \log_2 p = n - k \tag{7}$$

w której: n - ilość zmiennych, m - długość koniunkcji odpowiadającej zespołowi rzędu k , p - ilość pól w zespole, $p = 2^k$.

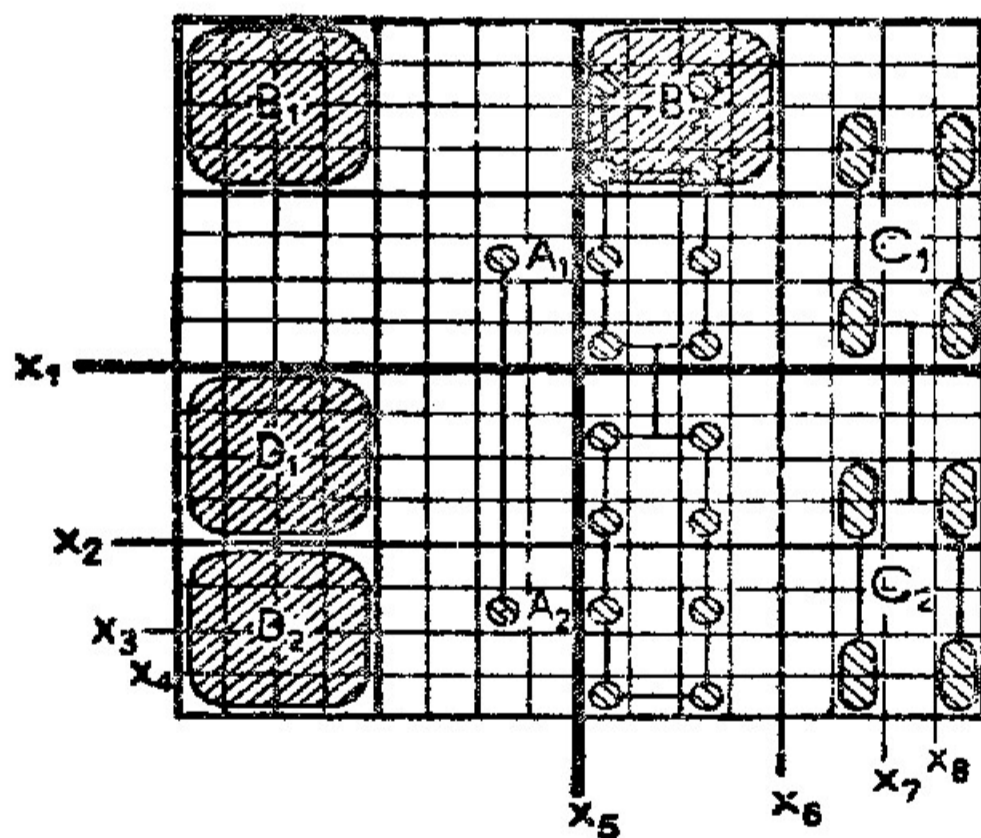


Rys. 10. Ilustracja zasady 1



Rys. 11. Ilustracja zasady 2

Na rys. 10 pola A i B tworzą zespół rzędu 1, ponieważ mają podobne połączenie w kwadratach 2a i 2b rzędu 2 leżących wzdłuż linii pionowej w tym samym kwadracie rzędu 3. Podobnie pola D i C oraz E i F. Zespoły A i B rzędu 1 z rys. 11 tworzą zespół rzędu 2, ponieważ pary (a_1, b_1) i (a_2, b_2) tworzą zespoły rzędu 1. Podobnie zespoły C i D oraz E i F tworzą zespoły rzędu wyższego.



Rys. 12. Przykłady par zespołów odpowiadających koniunkcjom sąsiednim

Dla sprawdzenia powyższych zasad można napisać iloczyny odpowiadające na rys. 12 parom zespołów: (A_1, A_2) , (B_1, B_2) , (C_1, C_2) i (D_1, D_2) . Pary te spełniają warunki zasad 1 i 2, powinny więc wyrażać się jedną koniunkcją liter.

Para A_1 i A_2

$$\begin{matrix} \bar{x}_1 & x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 x_6 x_7 \bar{x}_8 \\ x_1 & x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 x_6 x_7 \bar{x}_8 \end{matrix}$$

Para B_1 i B_2

$$\begin{matrix} \bar{x}_1 \bar{x}_2 & \bar{x}_5 \bar{x}_6 \\ \bar{x}_1 \bar{x}_2 & x_5 x_6 \end{matrix}$$

Para C_1 i C_2

$$\begin{array}{l} \boxed{\bar{x}_1} \quad x_3 x_5 x_6 x_8 \\ x_1 \quad x_3 x_5 x_6 x_8 \end{array}$$

Para D_1 i D_2

$$\begin{array}{l} x_1 \quad \boxed{\bar{x}_2} \quad \bar{x}_5 x_6 \\ x_1 \quad x_2 \quad \bar{x}_5 \bar{x}_6 \end{array}$$

Koniunkcje odpowiadające zespołom każdej pary są koniunkcjami sąsiednimi, co potwierdza oczekiwany wniosek. Podobnie można sprawdzić zasady 1 i 2 na innych przykładach. Ich słuszność bezpośrednio wynika z przyjętego sposobu budowy tablic i przyjętych określeń.

Dowolny zespół L_j rzędu k spełniający warunki

$$L_j \in F \cup W, \quad L_j \cap F \neq \emptyset$$

(przy czym: F - obraz jedynek, W - obraz zestawień obojętnych, \emptyset - zbiór pusty) nazywa się zespołem maksymalnym, jeśli nie istnieje zespół L^* rzędu $k^* > k$ taki, że

$$L \subset L^* \subset F \cup W \quad (8)$$

Koniunkcje przyporządkowane zespołom maksymalnym odpowiadają pojęciu prostych implikantów w sensie Quine a /15/ uogólnionemu na przypadek występowania zestawień obojętnych. Łatwo udowodnić, że każde wyrażenie minimalne w sensie jednego z kryteriów 1, 2 lub 3 składa się tylko z prostych implikantów.

Istotnie, jeśli założyć, że w wyrażeniu spełniającym jedno spośród kryteriów 1, 2, 3 występuje koniunkcja o długości 1 nie będąca prostym implikantem, to oznacza, że istnieje zespół L^* rzędu k^* , który spełnia warunki

$$L \subset L^* \subset F \cup W, \quad k > k^*$$

przy czym: L - zespół rzędu k odpowiadający danej koniunkcji.

Wynika z tego, że daną koniunkcję można zastąpić inną o długości $(n - k^*) < 1$, co spowoduje zmniejszenie ceny C (równ. (2)) wyrażenia. To zaś przeczy założeniu.

Praktycznie biorąc, technika określania zespołu maksymalnego polega na tym, że wybierając określone pole obrazu jedynek (zob.

pkt 7.2 i 7.3) przeszukuje się kolejno dokoła tego pola kwadraty coraz wyższych rzędów w celu znalezienia pola obrazu F lub obrazu W , z którym dane pole tworzy zespół rzędu 1. Następnie poszukuje się innego zespołu rzędu 1, z którym uzyskany zespół tworzy zespół rzędu 2 itd. Proces ten kontynuuje się dopóty, dopóki nie uzyska się zespołu możliwie najwyższego rzędu.

Jeśli przyjąć kryterium 1, to proces minimalizacji można określić jako proces poszukiwania takich zespołów maksymalnych L_1, L_2, \dots, L_r rzędu k_1, k_2, \dots, k_r , żeby:

$$1. L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_r - F \subset W.$$

$$2. \text{Suma } C = \sum_{i=1}^r (n - k_i) \text{ osiągała minimum w rodzinie wszystkich}$$

możliwych zbiorów zespołów maksymalnych spełniających warunek 1.

Warunek 1 mówi o tym, że obraz jedynek musi być w całości pokryty ¹⁾ zespołami L_1, \dots, L_r . Wynika on z założenia ekwiwalentności wyrażenia funkcji z funkcją zadaną. Warunek 2 wynika bezpośrednio z założonego kryterium minimalności, jeśli zauważyć, że wartość $(n - k_i)$ określa długość i -tej koniunkcji wyrażenia alternatywnego normalnego. Suma C stanowi więc cenę wyrażenia. Można ją przekształcić do postaci

$$C = rn - \sum_{i=1}^r k_i = rn - S \quad (9)$$

przy czym

$$S = \sum_{i=1}^r k_i \quad (10)$$

Ponieważ $\bigwedge_{i \in \{1, \dots, r\}} (n > k_i)$, więc C osiąga minimum wówczas, gdy S osiąga maksimum.

¹⁾ Sformułowanie: "zespół L pokrywa pole i " oznacza, że $i \in L$.

6. MINIMALIZACJA FUNKCJI BEZPOŚREDNIO NA PODSTAWIE JEJ OBRAZU W TABLICY

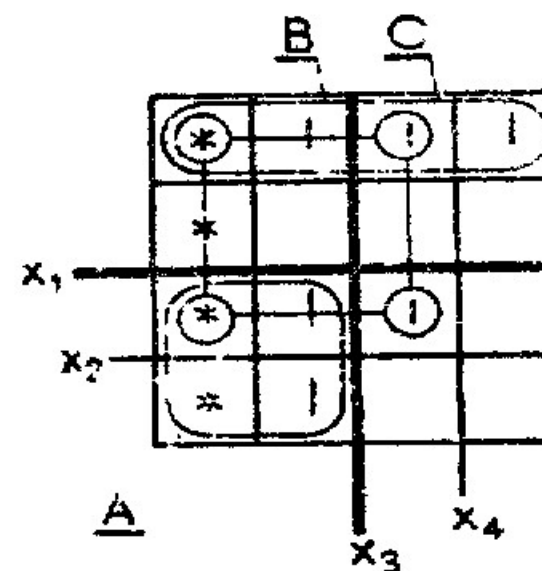
Jeśli ilość różnych sposobów pokrycia zespołami maksymalnymi obrazu funkcji jest nieduża, co występuje w przypadku małej ilości prostych implikantów, wyrażenie minimalne funkcji można bezpośrednio uzyskać na podstawie jej obrazu w tablicy. Wykorzystuje się tu praktycznie wnioski, które wynikają z warunków 1 i 2 określonych w pktcie 4 oraz uwag podanych w pktcie 3 (zakłada się $n \leq 8$), a mianowicie:

1) obraz pokrywa się minimalną ilością zespołów maksymalnych, to znaczy dąży się do osiągnięcia $r = r_{\min}$, co oznacza tworzenie zespołów maksymalnych możliwie nie przecinających się,

2) w przypadku różnych wariantów pokryć o $r = r_{\min}$ wybiera się to pokrycie, któremu odpowiada maksimum sumy $S = \sum_{i=1}^{r_{\min}} k_i$.

Pokrycie, któremu odpowiada wyrażenie minimalne, nazywa się pokryciem minimalnym.

P r z y k ł a d 6. 1. Znaleźć minimalne wyrażenie funkcji na podstawie jej obrazu podanego na rys. 8.



Rys. 13. Minimalne pokrycie funkcji z rys. 8

Na podstawie wniosków 1 i 2 dokonuje się pokrycia obrazu jedynek zespołami maksymalnymi tak jak to pokazano na rys. 13 linią ciągłą. Ponieważ jest to jedyne pokrycie obrazu funkcji trzema zespołami, a więc $r_{\min} = 3$, to odpowiadające mu wyrażenie algebraiczne będzie wyrażeniem minimalnym

$$f = \alpha(A) \vee \alpha(B) \vee \alpha(C)$$

przy czym $\alpha(A)$, $\alpha(B)$, $\alpha(C)$ - koniunkcje odpowiadające zespołom

A, B, C.

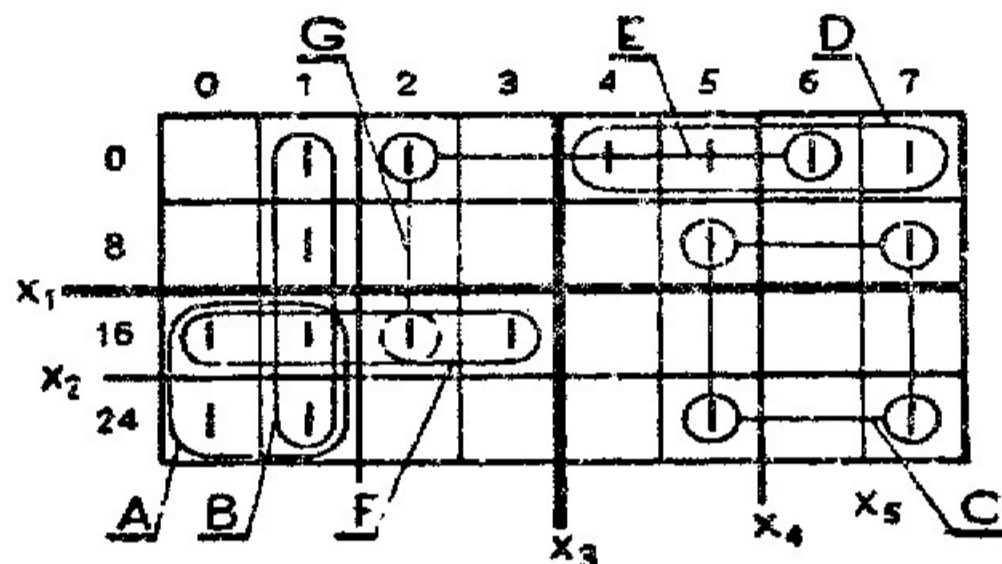
Po wyznaczeniu $\alpha(A)$, $\alpha(B)$, $\alpha(C)$ otrzymuje się

$$f = x_1 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

P r z y k ł a d 6.2. Znaleźć minimalne wyrażenie funkcji zadanej zbiorem odpowiedników dziesiętnych

$$f = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 29, 31\}$$

Obraz tej funkcji przedstawiono na rys. 14.



Rys. 14. Obraz funkcji pięciu zmiennych wraz z zaznaczonym pokryciem minimalnym

Rozpatrując różne możliwości pokryć znajduje się, że najmniejsza ilość zespołów maksymalnych pokrywających obraz funkcji wynosi 6. Na rys. 14 zaznaczono je linią ciągłą, przy czym pole 2 może być pokryte albo zespołem E, albo zespołem G (linia przerywana). Możliwe są więc dwa pokrycia obrazu najmniejszą ilością zespołów.

Ponieważ charakteryzuje je jednakowa suma $\sum_{i=1}^6 k_i = 11$, więc odpowiadają im dwa równoważne wyrażenia minimalne:

$$f_1 = \alpha(A) \vee \alpha(B) \vee \alpha(C) \vee \alpha(D) \vee \alpha(E) \vee \alpha(F)$$

$$f_2 = \alpha(A) \vee \alpha(B) \vee \alpha(C) \vee \alpha(D) \vee \alpha(G) \vee \alpha(F)$$

Po wyznaczeniu poszczególnych koniunkcji $\alpha(A)$, $\alpha(B)$, ... uzyskuje się ostatecznie

$$f_1 = x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$f_2 = x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

Ten sposób minimalizacji można jednak stosować tylko wówczas, gdy drogą prostych prób można ustalić minimalne pokrycie obrazu jedynek. W przypadkach bardziej skomplikowanych należy posługiwać się metodą opisaną w pkt 7.

7. MINIMALIZACJA FUNKCJI W PRZYPADKU OGÓLNYM

7.1. Określenia podstawowe. Tworzenie gwiazd pól obrazu jedynek

G w i a z d ą danego pola nazywa się zbiór wszystkich zespołów maksymalnych pokrywających to pole. Jeśli gwiazda danego pola składa się tylko z jednego zespołu maksymalnego, to zespół ten nazywa się ekstremalą podstawową.

E k s t r e m a l i p o d s t a w o w e j odpowiada na gruncie wyrażen algebraicznych p o d s t a w o w y p r o s t y i m p l i k a n t . Zbiór wszystkich ekstremali podstawowych nazywa się j ą d r e m pokrycia i - analogicznie - zbiór wszystkich podstawowych prostych implikantów - j ą d r e m f u n k c j i . Jak wiadomo (np. /12/), jądro funkcji musi wystąpić w każdym wyrażeniu minimalnym. Zespół maksymalny, który wchodzi do minimalnego pokrycia, nazywa się ekstremalą. Ekstremale, które nie są ekstremalami podstawowymi, nazywają się e k s t r e m a l a m i l u ż n y m i .

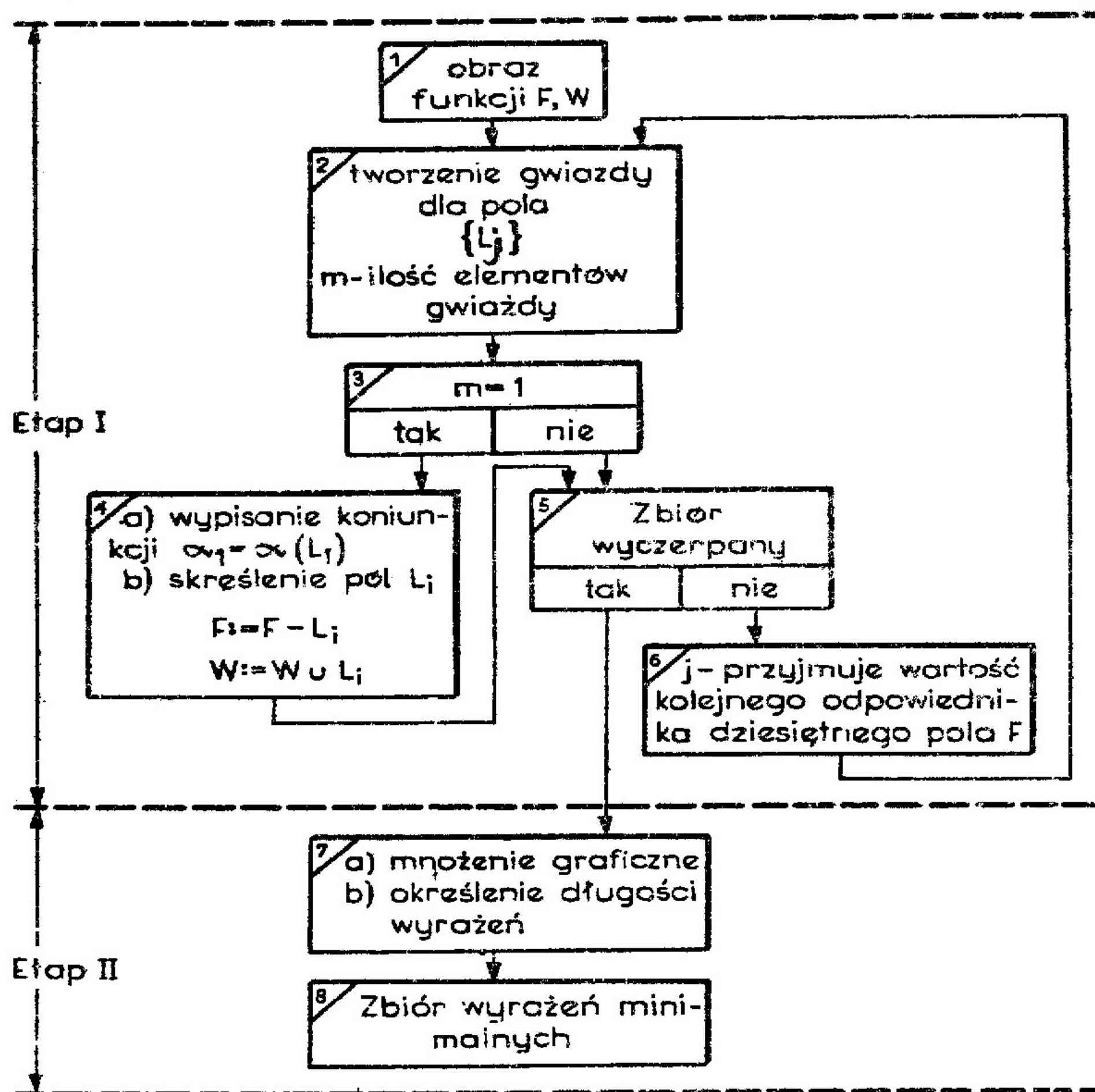
Zakłada się, że funkcja $f(x_1, \dots, x_n)$ ma obraz jedynek F i obraz zestawień obojętnych W . Tworzenie gwiazdy dla pola na przykład j polega na wyszukaniu wszystkich zespołów maksymalnych, które pokrywają to pole. Niech będą to zespoły np. L_1, \dots, L_m . Po wyznaczeniu zespołu L_1 wpisuje się w pola L_1 indeks i . Analogicznie postępuje się po wyznaczeniu każdego następnego zespołu L_2, L_3, \dots, L_m . Przy tworzeniu gwiazdy dla następnego pola indeks i przebiega wartości począwszy od $(i + 1)$ itd.

7.2. Ogólna metoda określenia wszystkich wyrażen minimalnych funkcji wraz ze zbiorem wyrażen granicznych

Poniżej opisana metoda ma zastosowanie wówczas, gdy ze względów praktycznych jesteśmy zainteresowani w posiadaniu wszystkich możliwych wyrażen minimalnych funkcji oraz zbioru wyrażen granicz-

nych. Praktycznie biorąc, można ją jednak stosować, ze względu na bardzo szybki wzrost ilości pracy formalnej, przy funkcjach do 5 lub 6 zmiennych, ewentualnie więcej w przypadku niedużej ilości elementów obrazu jedynek (lub zer; jeśli poszukuje się wyrażenia minimalnego negacji funkcji). Wyróżnia się w niej dwa etapy:

- 1) wyznaczenie gwiazd poszczególnych pól obrazu F ,
- 2) wyznaczenie podzbiorów prostych implikantów tworzących graniczne wyrażenia funkcji wraz ze zbadaniem ich długości - wyznaczenie wyrażenia minimalnego.



Rys. 15. algorytm metody określenia wszystkich wyrażeń minimalnych funkcji i zbioru wyrażeń granicznych

Po utworzeniu obrazu funkcji (F i W) tworzy się gwiazdę dla pola obrazu F o odpowiedniku dziesiętnym j (blok 2). Ustala się następujący przebieg wartości j :

Jeśli odpowiedniki dziesiętne pól obrazu F ustawić w ciąg o wzrastających wartościach, to j przebiega kolejno wyrazy tego ciągu. W pierwszym kroku tworzy się więc gwiazdę dla pola o najniższym odpowiedniku dziesiętnym. Jeśli gwiazda składa się z tylko jednego zespołu L_1 ($m = 1$), to wypisuje się koniunkcję $\alpha_1 = \alpha(L_1)$, a pola L_1 skreśla się. Pola skreślone traktuje się następnie jako elementy obrazu zestawień obojętnych. A więc

$$F := F - L_1 \tag{11}$$

$$W := W \cup L_1 \tag{12}$$

Następnie przechodzi się do wyznaczenia gwiazdy następnego pola aktualnego obrazu F. Kroki te powtarza się do wyczerpania pól F. Jeśli dane pole wchodzi do pewnych zespołów już określonych, to dopełnia się go indeksami nowo utworzonych zespołów. Uzyskany po ukończeniu tego procesu zbiór koniunkcji (określonych w bloku 4) stanowi jądro funkcji. Nieokreślone pola obrazu jedynek (aktualny obraz F) będą oznaczone co najmniej dwoma indeksami i .

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|-------|---|-------|-------|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | | | | | | * | | |
| 8 | | | | * | | | | * |
| 16 | | | * | * | | | | |
| 24 | | | | | * | | | |
| | | | | x_3 | | x_4 | x_5 | |

Rys. 16. Obraz funkcji do przykładu 7.1

| | | | | | | | |
|----|----------------|----------------|---|-----------------|-----------------|----------------|------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | ₂ | ₃ | | 4 ₃ | 5 | * | 6 ₄ |
| 8 | | | | 10 ₄ | * ₅ | | 11 ₅ |
| 16 | 7 ₂ | 8 ₂ | | * ₇ | * ₆ | 9 ₈ | |
| 24 | | | | 10 ₅ | 12 ₉ | * ₉ | 11 ₁₁ |
| | | | | x_3 | | x_4 | x_5 |

Rys. 17. Obraz funkcji z rys. 16 po przejściu etapu 1

P r z y k ł a d 7.1. Obraz funkcji przedstawiono na rys. 16. Rozpoczynając od pola 0 znajduje się, że tworzy ono zespoły rzędu 1 z polem 1 oraz 16. Zespoły te oznaczają się odpowiednio L_1 i L_2 . W pole 0 wpisuje się cyfry 1 1 2, w pole 1 - cyfrę 1, w pole 16 - cyfrę 2 (rys. 17).

Czynności te powtarza się kolejno dla pól 1, 3, 6. Rozpatrując pole 6 można zauważyć, że gwiazda tego pola składa się wyłącznie z zespołu L_6 . Zespół L_6 jest więc ekstremalą podstawową, a odpowiadająca mu koniunkcja - podstawowym prostym implikantem

$$\alpha_6 = \alpha(L_6) = \bar{x}_1 x_3 x_4$$

Pola zespołu L_6 przekreśla się:

$$F : = F - L_6$$

$$W : = W \cup L_6$$

Następnie tworzy się gwiazdę dla pola 16. Składa się ona z zespołu L_2 określonego poprzednio oraz zespołów L_7 i L_8 . W pole 16 dopisuje się indeksy 7 i 8.

Kontynuując powyższy proces do wyczerpania pól obrazu F otrzymuje się tablicę wypełnioną tak jak na rys. 17.

Etap 2 będzie opisany jako kontynuacja przykładu 7.1.

Dla każdego pola F tworzy się sumę logiczną symboli α_i przy czym i przebiega wartości indeksów wypisanych w dane pole, a następnie tworzy się iloczyn logiczny tych sum:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_1 \vee \alpha_3)(\alpha_3 \vee \alpha_4 \vee \alpha_5)(\alpha_2 \vee \alpha_7 \vee \alpha_8) \\ & (\alpha_8 \vee \alpha_9)(\alpha_5 \vee \alpha_{10})(\alpha_{11} \vee \alpha_{12})(\alpha_{10} \vee \alpha_{11}) \end{aligned} \quad (13)$$

Jeśli wymnożyć teraz wszystkie wyrazy przez siebie uwzględniając równości:

$$(\alpha_j \vee \alpha_n)(\alpha_j \vee \alpha_m) = \alpha_j \vee \alpha_n \alpha_m \quad (14)$$

$$\alpha_j(\alpha_j \vee \alpha_n \vee \alpha_m) = \alpha_j \quad (15)$$

to wyrażenie (13) można przekształcić do postaci sumy iloczynów symboli α_i , $i = 1, 2, \dots, 12$.

Założywszy, że $\alpha_i = \alpha(L_i)$, gdzie $\alpha(L_i)$ - koniunkcja odpowiadająca zespołowi L_i , to, jak wykazano w pracy Gluskeya /1/, koniunkcje α_i zawarte w każdym tak określonym iloczynie stano-

wią podzbiory prostych implikantów, które łącznie z jądrem funkcji tworzą różne graniczne wyrażenia funkcji. Do wyrażenia minimalnego wejdzie podzbiór o najmniejszej ilości elementów. W przypadku istnienia kilku takich podzbiorów do wyrażenia minimalnego wejdzie ten, dla którego cena C (równanie (1)) osiąga minimum. Przy różnych cenach istnieją równoważne wyrażenia minimalne.

Wykonanie bezpośrednio powyższych czynności jest jednak w praktyce dość uciążliwe. Można je jednak znacznie ułatwić stosując sposób, który będzie nazwany mnożeniem graficznym.

Zasada mnożenia graficznego jest następująca:

Jeżeli jest na przykład wyrażenie

$$(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_4 \vee \alpha_5) \quad (16)$$

to można je graficznie wymnożyć tak jak na rys. 18.

Rys. 18. Graficzne wymnożenie wyrażenia $(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_4 \vee \alpha_5)$

| | | |
|------------|--------------------|--------------------|
| α_1 | $\alpha_1\alpha_4$ | $\alpha_1\alpha_5$ |
| α_2 | $\alpha_2\alpha_4$ | $\alpha_2\alpha_5$ |
| α_3 | $\alpha_3\alpha_4$ | $\alpha_3\alpha_5$ |
| | α_4 | α_5 |

| | | | | | | | |
|------------|--|------------|---------------|---------------|------------|------------|---|
| α_8 | $\alpha_1\alpha_4$ $\alpha_2\alpha_4$ | | | | | | $\alpha_1\alpha_5$ $\alpha_2\alpha_5$ |
| α_1 | | | | | | | |
| α_7 | | | | | | | |
| α_6 | | | | | | | |
| α_2 | | | | | | | |
| α_7 | | | | | | | |
| α_5 | | | | | | | |
| α_3 | $\alpha_3\alpha_4$ $\alpha_7\alpha_8$ | | | | | | $\alpha_3\alpha_5$ $\alpha_7\alpha_{11}$ |
| | α_8 | α_9 | α_{10} | α_{11} | α_8 | α_9 | α_{10} |
| | | | α_4 | | | | α_5 |

Rys. 19. Graficzne wymnożenie wyrażenia $(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_4 \vee \alpha_5)(\alpha_6 \vee \alpha_7)(\alpha_8 \vee \alpha_9 \vee \alpha_{10} \vee \alpha_{11})$

Tablicę w kształcie prostokąta dzieli się na trzy kolumny, któ-

rym przypisuje się kolejno składniki pierwszego członu w nawiasie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, oraz na dwie warstwy, którym przypisuje się składniki drugiego członu α_4, α_5 . Na przecięciu się kolumn z warstwami powstają pola, z których każde odpowiada iloczynowi dwóch liter. Suma tych iloczynów daje wyrażenie, które jest wynikiem wymnożenia członów wyrażenia (16).

Jeśli chce się wyrażenie (16) pomnożyć przez nowy człon zawierający k składników, to każdą kolumnę (lub każdą warstwę) dzieli się na k części, którym przypisuje się kolejno składniki nowego członu. Mnożenie przez każdy następny człon wymaga podzielenia każdej warstwy lub każdej kolumny na ilość części równą ilości składników w członie, przy czym wybór sposobu dzielenia (dzielenie kolumn lub warstw) jest w zasadzie obojętny (rys. 19).

Elementarne pola powstałe przez przecięcie się najwęższych kolumn z najwęższymi warstwami odpowiadają zawsze poszczególnym iloczynom liter powstającym po wymnożeniu przez siebie wszystkich członów danego wyrażenia.

W ten sposób można graficznie wymnożyć wyrażenie (13). Ponieważ jednak w poszczególnych członach wyrażenia (13) symbole α_1 o takim samym indeksie muszą powtarzać się, to wykorzystując równości (14) i (15) mnożenie graficzne można dodatkowo uprościć.

Poniżej omówionych będzie kilka przykładów powtarzania się symboli. Trzeba na przykład wymnożyć człony wyrażenia

$$(\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_3 \vee \alpha_5) \quad (17)$$

W członie drugim i trzecim występuje ten sam symbol α_3 . Korzystając z równości (14) powyższe wyrażenie można przekształcić do postaci

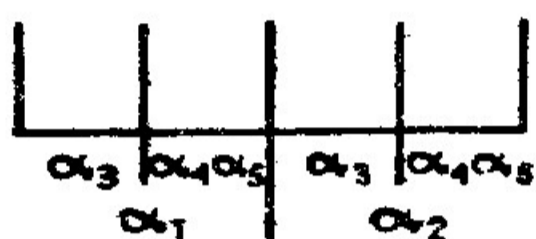
$$(\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_3 \vee \alpha_4 \alpha_5)$$

Jeśli więc wymnożono dwa pierwsze człony według poprzednio podanych reguł na przykład przez dwukrotne dzielenie kolumn, to pomnożenie przez trzeci człon nie wymaga dalszego dzielenia, lecz tylko dopisania symbolu α_5 do symbolu α_4 (rys. 20).

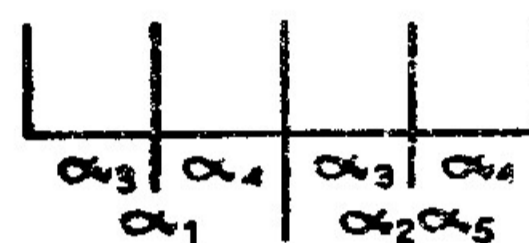
Jeśli trzeci człon składałby się nie z dwu, lecz z trzech składników, np. $\alpha_3 \vee \alpha_5 \vee \alpha_6$, to - uwzględniając, że

$$(\alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_3 \vee \alpha_5 \vee \alpha_6) = \alpha_3 \vee \alpha_4(\alpha_5 \vee \alpha_6)$$

należałoby każdą kolumnę odpowiadającą α_4 podzielić na dwie - przyporządkowane α_5 i α_6 , natomiast kolumna α_3 pozostałaby bez zmiany. Odnosi się to, oczywiście, do przypadku, gdy mnożenie przez trzeci człon chce się wykonać przez dalszy podział kolumn, w przeciwnym przypadku obowiązywałyby reguły poprzednie. Łatwo sprawdzić, że jeśli w członie trzecim wyrażenia (17) zamiast symbolu α_3 występowałby symbol α_1 , to uwzględnienie trzeciego członu przez podział kolumn polegałoby na dopisaniu symbolu α_5 do symbolu α_2 (rys. 21).



Rys. 20. Graficzne wymnożenie
wymnożenie wyrażenia
 $(\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_3 \vee \alpha_5)$



Rys. 21. Graficzne wymnożenie
wymnożenie wyrażenia
 $(\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_1 \vee \alpha_5)(\alpha_3 \vee \alpha_4)$

Zakłada się obecnie, że trzeba wyrażenie (17) wymnożone tak jak na rys. 20 pomnożyć przez człon na przykład $\alpha_5 \vee \alpha_6$ dzieląc kolumny

$$\left[\alpha_1(\alpha_3 \vee \alpha_4 \alpha_5) \vee \alpha_2(\alpha_3 \vee \alpha_4 \alpha_5) \right] (\alpha_5 \vee \alpha_6) \quad (18)$$

Po przekształceniu i uwzględnieniu równości (15) otrzymuje się

$$\alpha_1 \left[\alpha_3(\alpha_5 \vee \alpha_6) \vee \alpha_4 \alpha_5 \right] \vee \alpha_2 \left[\alpha_3(\alpha_5 \vee \alpha_6) \vee \alpha_4 \alpha_5 \right] \quad (19)$$

Porównując wyrażenie (18) z wyrażeniem (19) widać, że pomnożenie przez człon $(\alpha_5 \vee \alpha_6)$ wymaga podzielenia kolumny α_3 na dwie - przyporządkowane symbolom α_5 i α_6 . Kolumny α_4 i α_5 nie ulegają zmianie.

Jeśli w członie $(\alpha_5 \vee \alpha_6)$ zamiast symbolu α_5 występował-

by symbol α_3 występujący w tablicy na rys. 20 pojedynczo (nie jest do niego dopisany inny symbol), to łatwo wykazać, że pomnożenie przez taki czynnik polegałoby jedynie na dopisaniu symbolu α_6 w kolumnach oznaczonych $\alpha_4 \alpha_5$.

Rozważanie powyższe można uogólnić. Na przykład, po wymnożeniu 1 członów trzeba otrzymane wyrażenie pomnożyć przez czynnik następujący $S_\gamma = \alpha_{\gamma 1} \vee \alpha_{\gamma 2} \vee \dots \vee \alpha_{\gamma s}$. Zakłada się przy tym, że mnożenie ma być wykonane przez dzielenie kolumn.

T w i e r d z e n i e 7.1. Pomnożenie przez czynnik S_γ nie wymaga dzielenia kolumny przyporządkowanej iloczynowi $M = \alpha_{m1} \alpha_{m2} \dots \alpha_{mk}$, jeśli dla pewnego i ($i = 1, 2, \dots, k$) oraz pewnego j ($j = 1, 2, \dots, s$) zachodzi równość $\alpha_{mi} = \alpha_j$.

D o w ó d . Podziałowi kolumny M na części odpowiadające $\alpha_{\gamma 1}, \alpha_{\gamma 2}, \dots, \alpha_{\gamma s}$ odpowiada iloczyn MS_γ . Zakłada się, że równość $\alpha_{mi} = \alpha_j$ zachodzi wówczas, gdy $i = a$ oraz $j = b$. Jest więc

$$\begin{aligned} MS_\gamma &= \alpha_{m1} \alpha_{m2} \dots \alpha_{ma} \alpha_{mk} (\alpha_{\gamma 1} \vee \alpha_{\gamma 2} \vee \alpha_{\gamma b} \vee \dots \vee \alpha_{\gamma s}) \\ &= \alpha_{m1} \dots \alpha_{mk} \alpha_{ma} (\alpha_{\gamma 1} \vee \alpha_{\gamma 2} \vee \dots \vee \alpha_{ma} \vee \dots \vee \alpha_{\gamma s}) \end{aligned}$$

Uwzględniając równość (15) otrzymuje się

$$MS_\gamma = \alpha_{m1} \dots \alpha_{mk} \alpha_{ma} = M$$

co kończy dowód.

T w i e r d z e n i e 7.2. Jeśli w tablicy istnieje kolumna odpowiadająca M spełniającemu warunki twierdzenia 7.1, to przy mnożeniu przez S_γ kolumny, którym odpowiadają iloczyny N różniące się od M tym, że zamiast $\alpha_{ma} = \alpha_{\gamma b}$ występuje inny czynnik, np. α_{ng} , można dzielić na części przyporządkowane składnikom S_γ z wyłączeniem składnika $\alpha_{\gamma b}$.

D o w ó d . Z założeń twierdzenia (7.1) wynika, że M oraz N można wyrazić w sposób następujący:

$$N = L \alpha_{ng}, \quad M = L \alpha_{ma}$$

gdzie $L = \bigwedge_{i=1}^k \alpha_{mi}$. Wartość iloczynu

$$NS_{\gamma} = L\alpha_{n\xi} (\alpha_{\gamma 1} \vee \alpha_{\gamma 2} \vee \dots \vee \alpha_{\gamma b} \vee \dots \vee \alpha_{\gamma s}) =$$

$$= L\alpha_{n\xi} \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq b}}^s \alpha_{\gamma j} \vee L\alpha_{n\xi} \alpha_{\gamma b}$$

Ponieważ kolumna M występuje już w tablicy, to z równości

$$L\alpha_{n\xi} \alpha_{\gamma b} \vee M = M\alpha_{n\xi} \vee M = M$$

wynika, że kolumny $L\alpha_{n\xi} \alpha_{\gamma b}$ jest zbędna, a to dowodzi twierdzenia. W przypadku gdy $S_{\gamma} = \alpha_{\gamma 1} \vee \alpha_{\gamma b}$, jest

$$\begin{aligned} NS_{\gamma} \vee M &= L\alpha_{n\xi} \alpha_{\gamma 1} \vee L\alpha_{n\xi} \alpha_{\gamma b} \vee M = \\ &= L\alpha_{n\xi} \alpha_{\gamma 1} \vee M\alpha_{n\xi} \vee M = L\alpha_{n\xi} \alpha_{\gamma 1} \vee M \end{aligned}$$

a więc w tym przypadku wystarczy dopisać symbol $\alpha_{\gamma 1}$ do symbolu $\alpha_{n\xi}$.

Na podstawie twierdzeń 7.1 i 7.2 można w sposób uproszczony wyznaczać dowolne wyrażenie typu wyrażenia (13). Ponadto można wysnuć praktyczny wniosek, że w celu pomnożenia tablicy przez nowy człon należy dzielić wiersze lub kolumny w zależności od tego, które dzielenie jest korzystniejsze z punktu widzenia twierdzeń 7.1 i 7.2.

Kontynuując przykład 7.1 wymaga się obecnie na podstawie powyższych zasad wyrażenie (13). Należy zaznaczyć, że w praktyce proces mnożenia można wykonać bez wypisywania wyrażenia (13), a mianowicie bezpośrednio na podstawie tablicy z obrazem funkcji (rys. 17).

Składnikom pierwszego członu α_1 i α_2 przyporządkowuje się dwa wiersze, na które dzieli się tablicę (rys. 22). Pomnożenie przez drugi człon $\alpha_1 \vee \alpha_3$ realizuje się przez dopisanie symbolu α_3 do symbolu α_2 (na mocy twierdzenia 7.2). Wiersz α_1 pozostanie bez zmiany.

Pomnożenie przez człon $\alpha_3 \vee \alpha_4 \vee \alpha_5$ wymaga podziału tylko wiersza α_1 , wiersz $\alpha_2 \alpha_3$ pozostanie bez zmiany (twierdzenie 7.1). Pomnożenie przez człon $\alpha_2 \vee \alpha_7 \vee \alpha_8$ można wykonać przez

podział tablicy na kolumny α_2 , α_7 i α_8 .

| | | | | | | | |
|---------------------|------------------------|---------------------------|---------------------|---------------------------|---------------|---------------------------|-----------|
| | $\alpha_3 \alpha_{10}$ | 6 | $\bar{6}$ | 6 | 6 | 5 | $\bar{5}$ |
| α_1 | $\alpha_4 \alpha_{10}$ | 6 | $\bar{6}$ | 6 | 6 | 5 | $\bar{5}$ |
| | α_5 | 5 | $\bar{6}$ | 5 | 6 | (4) | 5 |
| | α_6 | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | 6 | 7 | 5 | 6 |
| $\alpha_2 \alpha_3$ | α_{10} | $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | 6 | $\bar{6}$ | 5 | $\bar{5}$ |
| | α_{11} | $\alpha_{12} \alpha_{10}$ | α_{11} | $\alpha_{12} \alpha_{10}$ | α_{11} | $\alpha_{12} \alpha_{10}$ | |
| | $\alpha_2 \alpha_9$ | | $\alpha_7 \alpha_9$ | | α_8 | | |

Rys. 22. Graficzne wymnożenie wyrażenia (13)

Po wymnożeniu w podobny sposób wszystkich członów wyrażenia (13) otrzymuje się tablicę podzieloną tak jak na rys. 22. Ponieważ niektóre symbole użyte przy dzieleniu warstw występowały także przy dzieleniu kolumn, więc w pewnych podzbiorach symboli przy porządkowanych poszczególnym polom tablicy mogą wystąpić powtórzenia symboli. Powtórzenia te można zaznaczyć przez wpisanie w odpowiednie pola typu znaków "-", ile jest powtórzeń.

Następnie w każde pole wpisuje się liczbę określającą długość odpowiadającego mu iloczynu i odnajduje się pole, któremu odpowiada iloczyn najkrótszy. Jak widać na rys. 22, najkrótszy iloczyn ma długość 4. Jest to iloczyn

$$\alpha_1 \alpha_5 \alpha_8 \alpha_{11}$$

Koniunkcje α_1 , α_5 , α_8 , α_{11} wraz z podstawowym prostym implikantem α_6 tworzą więc wyrażenie minimalne

$$f = \alpha_1 \vee \alpha_5 \vee \alpha_6 \vee \alpha_8 \vee \alpha_{11}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \\ \alpha_5 &= \bar{x}_3 x_4 x_5 \\ \alpha_6 &= \bar{x}_1 x_3 x_4 \\ \alpha_8 &= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \\ \alpha_{11} &= x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \end{aligned}$$

Cena wyrażenia

$$C = \sum_{i=1,5,6,8,11} l_i = 18$$

Należy zaznaczyć, że nie wszystkie iloczyny zawarte w polach tablicy muszą odpowiadać wyrażeniom granicznym.

7.3. Metoda bezpośredniego określania wyrażenia minimalnego.

Twierdzenie o lokalnym wyłuskiwaniu ekstremali

Poniżej podano metodę bezpośredniego uzyskiwania wyrażenia minimalnego bez potrzeby tworzenia zbioru wyrażeń granicznych. Umożliwia ona znaczne rozszerzenie zakresu minimalizowanych funkcji - do 8 lub 9 zmiennych - w stosunku do metody opisaną w pkt 7.2. Podstawą tej metody jest twierdzenie o lokalnym wyłuskiwaniu ekstremali (twierdzenie 7.3).

Zakłada się, że dane są zbiory F' i W' spełniające relację

$$\begin{aligned} F' &\subset F \\ W' &\supset W \\ F' \cup W' &= F \cup W \end{aligned}$$

gdzie: F - obraz jedynek minimalizowanej funkcji $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 W - obraz zestawień obojętnych.

Niech $L_{r1}, L_{r2}, \dots, L_{rn}$ i L_s będą zespołami maksymalnymi o rzędach odpowiednio k_{r1}, k_{rn} i k_s określonymi na zbiorze $F' \cup W'$ i spełniającymi warunek

$$L \cap F' \neq \emptyset$$

gdzie: $L = L_{r1} \cap L_{r2} \cap \dots \cap L_{rn} \cap L_s$, \emptyset - zbiór pusty.

Twierdzenie 7.3. Jeśli

$$L_s - L \subset W' \tag{20}$$

oraz

$$\bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} (k_{ri} \geq k_s) \tag{21}$$

to istnieje minimalne pokrycie obrazu F' nie zawierające L_S .

D o w ó d . Zakłada się najpierw, że

$$\bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} (k_{ri} > k_S) \quad (22)$$

Z warunku (2) wynika, że L_S pokrywa tylko te pola obrazu jedynek, które należą do L , a więc także do każdego L_{ri} . Cena pokrycia L zespołem L_{ri} jest

$$C_{ri} = n - k_{ri}$$

Cena pokrycia L zespołem L_S

$$C_S = n - k_S$$

Ze względu na (22) jest

$$\bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} (C_{ri} < C_S)$$

Wynika z tego, że w tym przypadku w żadnym minimalnym pokryciu F' nie może wystąpić L_S . Jeśli natomiast

$$\bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} (k_{ri} = k_S)$$

to dla pewnego $i = t$ zachodzi równość $C_{rt} = C_S$.

Ze względu jednak na (20) jakiegokolwiek pokrycie zawierające C_S może mieć cenę co najwyżej równą cenie pokrycia zawierającego C_{rt} , lecz nie mniejszą. Tak więc F' zespół C_S można zastąpić zespołem C_{rt} , a to dowodzi twierdzenia.

Powyższe twierdzenie można rozszerzyć na przypadek, gdy zamiast jednego zespołu L_S występuje zbiór $\{L_{S1}, \dots, L_{Sm}\}$ zespołów.

W analogiczny sposób łatwo dowieść, że przy spełnieniu warunków

$$\bigwedge_{j \in \{1, \dots, m\}} (L_{Sj} - L \subset W') \quad (23)$$

$$\bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} \bigwedge_{j \in \{1, \dots, m\}} (k_{ri} \geq k_{Sj}) \quad (24)$$

gdzie k_{Sj} , $j = 1, \dots, m$ - rzędy zespołów L_{Sj} , istnieje minimalne pokrycie nie zawierające żadnego zespołu L_{Sj} , $j = 1, \dots, m$.

Dowodu ze względu na żatwość nie podaje się.

Zespoły L_{r1} spełniające warunek $k_r \geq k_s$ nazywa się w dalszych rozważaniach zespołami typu r , zespoły zaś L_{s1}, \dots, L_{sm} zespołami typu s (przy założeniu, że są spełnione warunki twierdzenia 7.3).

Z twierdzenia (7.3) wynikają ważne wnioski praktyczne. Jeśli na przykład gwiazda danego pola obrazu F składa się z dwóch zespołów maksymalnych L_r i L_s o rzędach k_r i k_s i jest $k_r \geq k_s$, przy czym L_s spełnia warunek (20) (L_r jest więc zespołem typu r , L_s zaś zespołem typu s), to można przyjąć, że L_r wchodzi do pewnego minimalnego pokrycia, a więc jest ekstremalą.

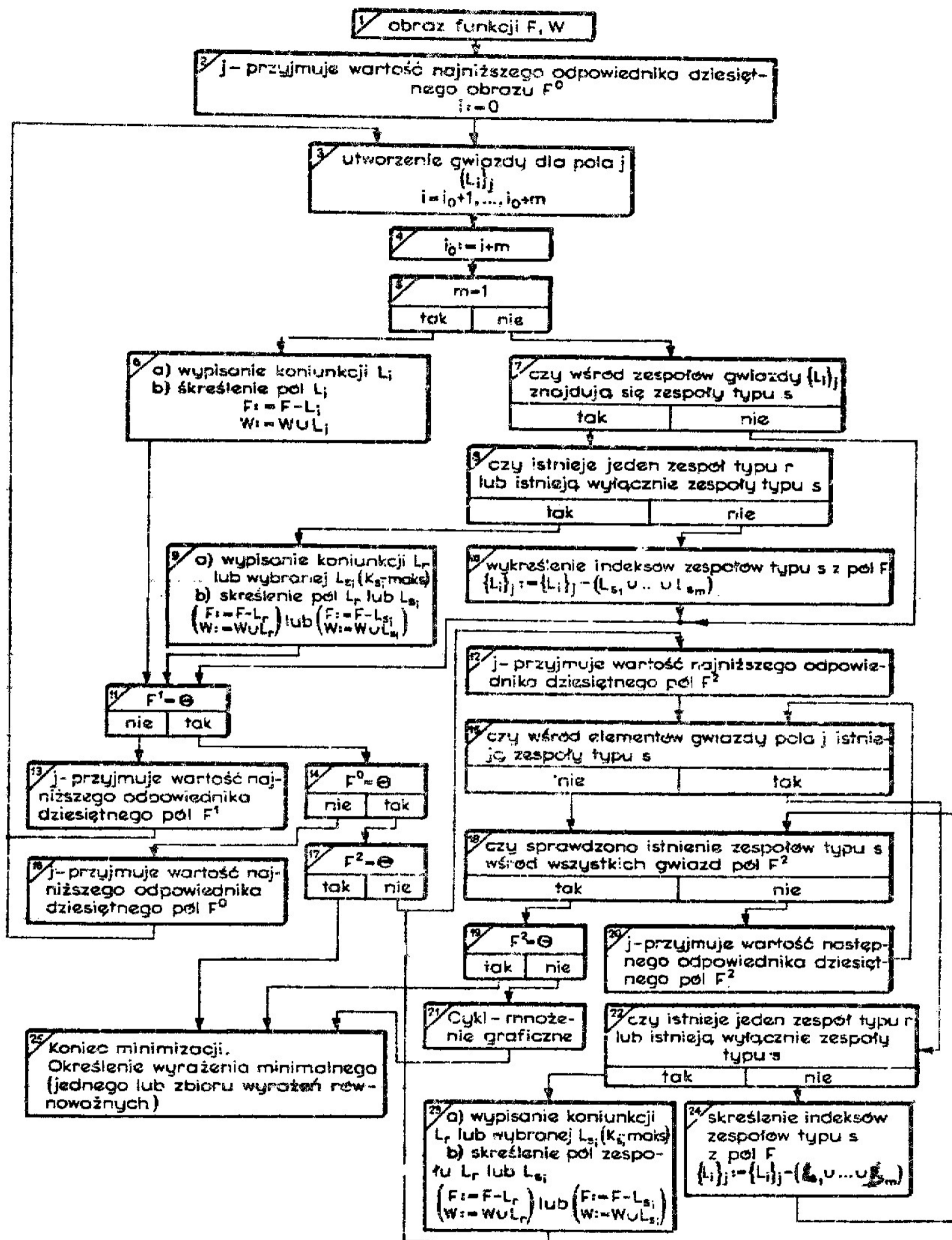
Wniosek ten można zainterpretować w sposób następujący:

Jeśli $L_r - L \subset W'$, gdzie $L = L_r \cap L_s$, to pokrycie F' zawierające L_r jest co najmniej równoważne pokryciu zawierającemu L_s , przy czym ma taką samą długość. Jeśli natomiast $L_r - L \not\subset W'$, a więc $(L_r - L) \cap F' \neq \emptyset$, to oznacza, że L_r pokrywa pewne pola obrazu jedynek F' , które nie należą do $L_r \cap L_s$. Pokrycie zawierające L_r może być więc również co najmniej równoważne pokryciu zawierającemu L_s , a nawet od niego krótsze.

W przypadku gdy gwiazda danego pola składa się z kilku zespołów typu s oraz r , wówczas zespoły typu s można wyłączyć z rozważań (przekreśla się odpowiednie indeksy w polach, z których zespoły te składają się).

Algorytm metody wykorzystującej twierdzenie 7.3 przedstawiono na rys. 23. Przyjęto oznaczenia: F - obraz jedynek zadanej funkcji $f(x_1, \dots, x_n)$, F^0 - zbiór pól obrazu F nie oznaczonych aktualnie żadnym indeksem, F^1 - zbiór pól obrazu F oznaczonych jednym indeksem, F^2 - zbiór pól obrazu F oznaczonych więcej niż jednym indeksem, W - obraz zestawień obojętnych, m - ilość elementów gwiazdy, i - indeks aktualnie ostatniego określonego zespołu maksymalnego.

Metoda ta różni się od poprzedniej tym, że przy każdym kroku, w przypadku gdy $m \neq 1$, bada się, czy są spełnione warunki twierdzenia 7.3 (blok 7). Jeśli są one spełnione, to albo uzyskuje się ekstremalę L_r lub L_{s1} (blok 9), albo wykreśla się indeksy s z pól zespołów L_{s1} (blok 10). W ostatecznym wyniku proces ten kończy się albo wyczerpaniem pól obrazu F (uzyskany zbiór ekstremali tworzy wyrażenie minimalne), albo otrzymaniem zredukowanego ob-



Rys. 23. Algorytm metody bezpośredniego określenia wyrażenia minimalnego

razu $F = F^2$, przy czym dla żadnej z gwiazd pól F^2 nie można zastosować twierdzenia 7.3. Tego rodzaju obraz jedynek nazywa się cyklem. W przypadku cyklu podzbiór prostych implikantów tworzący wyrażenie minimalne można otrzymać za pomocą mnożenia graficznego lub przez pokraktowanie dowolnego zespołu maksymalnego jako ekstremali i dalsze postępowanie według opisanego algorytmu (zob. przykład 7.2).

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|---|---|---|---|-------|-------|---|-------|
| 0 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | |
| x_1 32 | | ⊙ | | | | | | |
| 40 | | ⊙ | | | | | | |
| x_2 48 | ⊙ | | | | | | | |
| x_3 56 | | | | | | | | |
| | | | | | x_4 | x_5 | | x_6 |

Rys. 24. Obraz funkcji -
do przykładu 7.2

P r z y k ł a d 7.2. Na rys. 24 przedstawiono obraz funkcji 6 zmiennych określonej dla każdego zestawienia wartości zmiennych. Wyróżniono dwa przypadki: a) gdy pole 33 należy do obrazu jedynek F , pole 48 zaś do obrazu zer, b) gdy jest odwrotnie.

W przypadku a) tworzy się gwiazdę dla pola 0, w wyniku czego otrzymuje się

$$L_1 = \{0, 2\}, \quad L_2 = \{0, 32\}$$

$$F^1 = \{2, 32\}, \quad F^2 = \{0\}$$

Zgodnie ze schematem operacyjnym (przebiega się bloki 4, 5, 7, 11, 13) kolejnym krokiem jest tworzenie gwiazdy dla pola 2, a następnie kolejno dla pól 3, 11, 9, 13, 18, 26, 29. Gwiazda pola 29 składa się wyłącznie z zespołu L_9

$$\alpha(L_9) = \alpha_9 = \bar{x}_1 x_3 x_4 \bar{x}_5 x_6$$

α_9 jest podstawowym prostym implikantem, pola L_9 skreśla się (blok 6).

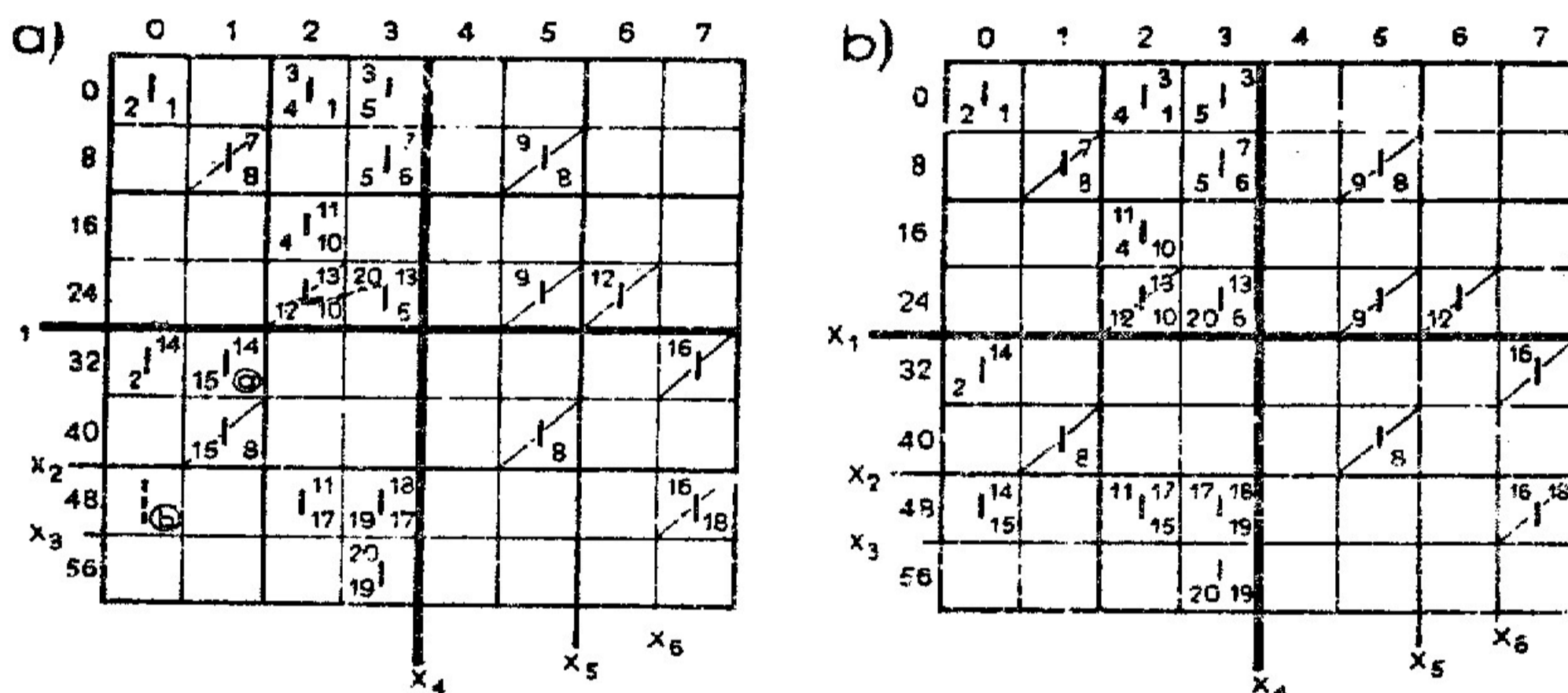
Następny krok - określenie gwiazdy dla pola 30 ; składa się ona znowu z jednego zespołu L_{12}

$$\alpha_{12} = \bar{x}_1 x_2 x_3 x_5 \bar{x}_6$$

Dalsze kroki - tworzenie gwiazd dla pól 32, 33, 39, 45. Gwiazdy pól 39 i 45 składają się z pojedynczych zespołów: L_{16} oraz L_8 . Uzyskuje się podstawowe proste implikanty:

$$\alpha_{16} = x_1 \bar{x}_3 x_4 x_5 x_6$$

$$\alpha_8 = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_5 x_6$$



Rys. 25. Obraz funkcji do przykładu 7.2:
 a) po określeniu jądra pokrycia w przypadku a;
 b) po określeniu jądra pokrycia i wykreśleniu indeksów zespołów typu s w przypadku b

Tworzy się gwiazdy dla pól 50, 51, 59. Po utworzeniu gwiazdy dla pola 59

$$F^0 = F^1 = 0$$

Otrzymuje się tablicę wypełnioną tak jak na rys. 25a.

Przebiega się bloki 11, 14, 17, 12. Bada się gwiazdy pól 0, 2, 3, 11. W przypadku gwiazdy pola 11 są spełnione warunki twierdzenia

nia 7.3. Zespół L_7 jest zespołem typu s , indeks 7 wykreśla się z pola 11.

Analogiczna sytuacja powtarza się dla pól 18, 27 (zespoły L_{10} i L_{13}). Bada się gwiazdy pól 32, 33. Gwiazda pola 33 składa się z zespołów L_{14} i L_{15} , przy czym zespół L_{15} jest zespołem typu s . Zespół L_{14} jest więc ekstremalą (blok 23)

$$\alpha_{14} = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5$$

Przebiega się bloki 12, 15. Bada się od początku gwiazdę pola 0. Zespół L_2 okazuje się obecnie zespołem typu s . Zespół L_1 traktuje się więc jako ekstremalę (bloki 22, 23)

$$\alpha_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_6$$

Bada się gwiazdę pola 3 i otrzymuje się ekstremalę L_5

$$\alpha_5 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 x_6$$

Po zbadaniu pól 18 i 27 otrzymuje się ekstremale L_{11} , L_{20}

$$\alpha_{11} = x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \bar{x}_6$$

$$\alpha_{20} = x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 x_6$$

Przy badaniu gwiazdy pola 51 widać, że każdy jej element (L_{17} lub L_{18} lub L_{19}) można uważać za ekstremalę:

$$\alpha_{17} = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5, \quad \alpha_{18} = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_5 x_6, \quad \alpha_{19} = x_1 x_2 \bar{x}_4 x_5 x_6$$

Ponieważ $F^2 = \emptyset$, proces minimalizacji zostaje zakończony. Zależnie od tego, którą koniunkcję α_{17} , α_{18} czy α_{19} włączy się do wyrażenia, otrzymuje się trzy różne wyrażenia minimalne

$$f_{1,2,3} = \alpha_6 \vee \alpha_{12} \vee \alpha_{16} \vee \alpha_8 \vee \alpha_{14} \vee \alpha_1 \vee \alpha_5 \vee \alpha_{11}$$

$$\vee \alpha_{20} \vee \begin{pmatrix} \alpha_{17} \\ \alpha_{18} \\ \alpha_{19} \end{pmatrix}$$

$$c = \sum_1 l_1 = 49$$

W przypadku b (rys. 25b) początkowo szło do pola 32 proces minimalizacji przebiega identycznie z przebiegiem w przypadku a. Otrzymuje się więc identyczne podstawowe implikanty.

Gwiazda pola 32 składa się z zespołu L_2 i L_{14} , do którego wchodzi obecnie pole 48. Proces kontynuuje się według schematu operacyjnego z rys. 23. Po utworzeniu gwiazdy dla ostatniego pola 59 rozpoczyna się kolejne badanie gwiazd począwszy od pola 0. Stwierdza się, że zespoły $L_7, L_{10}, L_{13}, L_{18}$ są zespołami typu s. Po przebadaniu wszystkich gwiazd pól stwierdza się, że każde pole oznaczone jest co najmniej dwoma indeksami (rys. 25b). Chcąc określić podzbiór ekstremali dla obrazu F^2 można zastosować mnożenie graficzne lub posłużyć się następującym sposobem:

Wybiera się zespół pokrywający pole z największą ilością indeksów i traktuje się je jako ekstremalę (wykreśla się jego indeks z pól F^2). Ta operacja umożliwia zazwyczaj określenie wszystkich dalszych ekstremali. W przypadku powstania nowego cyklu próbuje się wybrać inną ekstremalę początkową lub wybiera się ponownie zespół pokrywający pole z największą ilością indeksów, który traktuje się dalej jako kolejną ekstremalę itd.

Potraktujmy na przykład zespół L_1 jako ekstremalę. Otrzymuje się wtedy ekstremale $L_5, L_{11}, L_{20}, L_{14}$ oraz L_{17} (lub L_{19}).

Wybierając jako ekstremalę początkową na przykład L_2 jako dalsze otrzymuje się ekstremale L_{15}, L_{19}, L_6, L_3 oraz L_{11} (albo L_4).

Ponieważ wszystkie zespoły są rzędu 1, a ilość pól obrazu F^2 jest 11, więc wnioskuje się z tego, że nie istnieje pokrycie F^2 krótsze niż 6. Otrzymano więc cztery równoważne (nie wyklucza to istnienia innych) wyrażenia minimalne:

$$f_{1,2} = f_0 \vee \alpha_1 \vee \alpha_5 \vee \alpha_{11} \vee \alpha_{20} \vee \alpha_{14} \vee \begin{pmatrix} \alpha_{17} \\ \alpha_{19} \end{pmatrix}$$

$$f_{3,4} = f_0 \vee \alpha_2 \vee \alpha_{15} \vee \alpha_{19} \vee \alpha_6 \vee \alpha_3 \vee \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

gdzie

$$f_7 = \alpha_9 \vee \alpha_{12} \vee \alpha_{16} \vee \alpha_8$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_6, & \alpha_2 &= \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6, & \alpha_3 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \\ \alpha_5 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 x_6, & \alpha_6 &= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 x_5 x_6, & \alpha_8 &= \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_5 x_6 \\ \alpha_9 &= \bar{x}_1 x_3 x_4 \bar{x}_5 x_6, & \alpha_{11} &= x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \bar{x}_6, & \alpha_{12} &= \bar{x}_1 x_2 x_3 x_5 \bar{x}_6 \\ \alpha_{14} &= x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6, & \alpha_{15} &= x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_6, & \alpha_{16} &= x_1 \bar{x}_3 x_4 x_5 x_6 \\ \alpha_{17} &= x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5, & \alpha_{19} &= x_1 x_2 \bar{x}_4 x_5 x_6, & \alpha_{20} &= x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 x_6 \end{aligned}$$

Chcąc otrzymać zbiór wszystkich równoważnych wyrażeń minimalnych należałoby zastosować mnożenie graficzne.

8. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona powyżej metoda minimalizacji umożliwia stosunkowo szybko i prosto uzyskanie zbioru równoważnych wyrażeń minimalnych funkcji logicznej do 7 lub 8 zmiennych. Do analizy sieci logicznych oraz tworzenia uproszczonych wyrażeń funkcji bez gwarancji w ogólnym przypadku uzyskania wyrażeń minimalnych (metoda opisana w pktcie 5) wydaje się celowe stosowanie jej nawet przy większej ilości zmiennych. Rozszerzenie zakresu zmiennych w stosunku do metody Karnaugh'a i jej różnych modyfikacji uzyskano dzięki podaniu sposobu tworzenia zbioru prostych implikantów i wyboru ekstremal.

Zasadniczą zaletą metody jest to, że umożliwia uzyskanie wyrażenia minimalnego funkcji wyłącznie drogą graficzną, dzięki czemu unika się dużej ilości pracy formalnej wymaganej przy jakiegokolwiek metodzie niegraficznej. Ponadto metoda ta jest szczególnie korzystna w przypadku, gdy istnieją kombinacje obojętne, które dzięki tablicowemu przedstawieniu funkcji znajduje się niejako automatycznie i dlatego łatwo można je uwzględnić w procesie minimalizacji. Z powyższych względów nadaje się ona przede wszystkim do minimalizacji "ręcznej", choć można ją również zaprogramować na maszynę cyfrową. W tym drugim przypadku powyżej podane ograniczenia co do ilości zmiennych przestałyby być aktualne.

LITERATURA

1. E.I. Mc Cluskey: Minimization of Boolean Functions. Bell Syst. Techn. J. Nov. 1956.
2. M. Karnaugh: The map method for synthesis of combinational logic circuits. Trans. AIEE pt. 1 Commun. & Electron. 1953 vol. 72 No. 2.
3. S.H. Caldwell: Switching circuits and logical design. New York 1958 J. Wiley.
4. E.W. Veitch: A chart method for simplifying truth functions. Proc. Association for Computing Machinery, Pittsburg (Pa) 1952
5. A.D. Zakriewski: Wizualno-matrycznyj metod minimizacji buliowych funkcji. Automat. i telermechan. 1960 Nr. 3.
6. A. Svoboda: Grafico-mechanicke pomucky uzirane pri analize a synthese kontaktowych obvodu. Stroje Zpracov.inform. 1956 Nr.4
7. J. Bromirski: Macierzowa metoda minimizacji funkcji bulowskich 5 i 6 zmiennych. Prace III Kraj. Konf. Automatyki t. 2. Gliwice 1966 Politechnika Śląska.
8. M. Th. Booth: The vertex-frame method for obtaining minimal proposition - letter formulas. IRE Trans. on Electronic computer 1962 vol. EC-11.
9. S. Waligórski: Calculation of the Quines table for truth functions. Prace Zakł. Aparatów Matematycznych PAN A15 t. 2. Warszawa 1961.
10. Woprosy teorii matematycznych maszyn. Sbornik statiej. Moskwa 1964.
11. T.C. Bartee, I.L. Lebow, I.S. Reed: Theory and design of digital machines. New York 1962 Mc Graw-Hill.
12. D.A. Pospiełow: Logiczeskije metody analiza i sintieza schiem. Moskwa 1964 Izd. Energijs.
13. Synthesis of electronic computing and control circuits. Staff of the Harvard Computation Laboratory. Harvard University Press Cambridge (Mass) 1951, chap. 5.
14. T.L. Majstrowa: Liniejnoje programirowanije i zadacza minimizacji normalnych form bulewych funkcji. Problemy pieriedaczi informaczi. Wyp. 12. Moskwa 1963 Izd. AN SSSR.
15. W.V. Quine: The problem of simplifying truth functions. Amer. Mathemat. Monthly 1959 vol. 59.
16. R.H. Urbano, R.K. Mueller: A topological method for the minimal forms of a boolean function. IRE Trans. on Electron. Computers 1956 vol. 5.
17. I.P. Roth: Algebraic topological methods for the synthesis of switching systems. Trans. Amer. Mathemat. Soc. July 1958.
18. I.P. Roth: Algebraic topological methods in synthesis of switching systems. Proc. Internat. Symp. on the Theory of Switching. Pt. 2. Harvard University Cambridge Apr. 1957.
19. J.I. Żurawlew: O razlicznych poniatlach minimalnosti DNF. Sibirskij matematycznyj žurnal 1960 Nr. 4.
20. J.I. Żurawlew: Teorietiko-mnozestwiennyje metody w algiebrze logiki. Probl. kibernetyki 1962 Nr. 8.
21. J.L. Wasiljew: O sprawnieni i skoczności tupikowych i minimalnych DNF. Probl. kibernetiki 1963 Nr. 10.
22. M.S. Basu, S.R. Das, A.K. Choudhury: A chart method for the determination of one of the minimal forms of a switching function. J. Electronics & Control 1964 No. 4.